

مبحث : ماتریس و کاربرد (حل دستگاه معادلات)

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره: نوروز
شماره جلسه: جلسه سوم
نام درس و مقطع و رشته: هندسه ۳ - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه: ۱۴۰۲/۱/۱۰

نام کتاب	من در کلاس حل می کنم					خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)				
کتاب درسی										
کتاب آبی				۱۲۰	۱۱۶	۱۰۱			۱۱۳	۱۰۴
کتاب نوروز						۷۳۶			۷۳۳	۷۳۰
						۷۲۹				



بیان ماتریسی:

شکل کلی دستگاه دو معادله و دو مجهول به صورت زیر است:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

دستگاه معادلات دو مجهولی فوق را می توان به صورت معادله ی ماتریسی $AX = B$ یا به طور ساده $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ نوشت.

در این نمایش، A ماتریس «ضرایب»، X ماتریس «مجهولات» و B ماتریس «مقادیر معلوم» است.

نکته

روش حل دستگاه:

در دستگاه معادله ی $AX = B$ ، اگر ماتریس A دارای معکوس باشد، ماتریس جواب عبارت است از:

$$X = A^{-1}B$$

در دستگاه $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ است. $x + y$ کدام است؟

۴ ④

۲ ③

-۲ ②

-۴ ①

نکته

حالت ۱:

اگر $|A| = ab' - a'b \neq 0$ ، یعنی: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، آنگاه دستگاه «دقیقاً یک جواب» برای x و y دارد که از رابطه ی:

$$X = A^{-1}B$$

یا روش های دیگر به دست می آیند.

بیان هندسی:

در این حالت، خط های $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ دقیقاً در یک نقطه متقاطع هستند که مختصات آن نقطه، همان جواب دستگاه است.



نکته

حالت ۲:

اگر $|A| = ab' - a'b = 0$ ، یعنی: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ، و بعلاوه داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

آنگاه دستگاه «بی‌شمار» جواب برای x و y دارد.

بیان هندسی:

در این حالت، خط‌های $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ بر هم منطبق بوده و تمام نقاط روی خط، جواب‌های دستگاه هستند.

نکته

حالت ۳:

اگر $|A| = ab' - a'b = 0$ ، یعنی: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ، ولی:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

آنگاه دستگاه «بدون جواب» است.

بیان هندسی:

در این حالت، خط‌های $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ موازی و از هم جدا بوده و چون نقطه‌ی مشترک ندارند، هیچ جوابی برای دستگاه وجود نخواهد داشت.

❖ به‌ازای کدام مقدار a ، دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = a(x - 2) \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟

④ $\frac{3}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

② $-\frac{2}{3}$

① $-\frac{3}{2}$

❖ اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ 20x + by = 5 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، کدام دستگاه معادلات، جواب منحصر به‌فرد دارد؟

④ $\begin{cases} ax + by = 2 \\ 3ax + 3by = 5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} ax + 15y = 5 \\ bx + ay = 3 \end{cases}$

② $\begin{cases} ax - 15y = 1 \\ 4x + by = 5 \end{cases}$

① $\begin{cases} 15x - 4y = 1 \\ bx + ay = 3 \end{cases}$

❖ دستگاه معادلات $\begin{cases} (m - 3)x + 3y = m \\ 4x + (m + 1)y = 2 \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار m بدون جواب است؟

④ -3

③ 3

② 5

① -5

نکته

دستگاه همگن:

برای دستگاه معادله‌ی همگن $AX = \overline{0}$ فقط دو حالت وجود دارد:

❖ اگر $|A| \neq 0$ باشد، آنگاه فقط یک جواب $X = \overline{0}$ برای دستگاه وجود دارد.

❖ اگر $|A| = 0$ باشد، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.



نکته

در ماتریس مربعی A مرتبه‌ی ۳، فرض کنید درایه‌ی a_{ij} با عدد k جمع شود.
سطر و ستون شامل درایه‌ی a_{ij} را حذف کنید تا ماتریس M از مرتبه‌ی ۲ باقی بماند.
در این صورت:

دترمینان ماتریس A به اندازه‌ی $|M|(-1)^{i+j}$ تغییر خواهد کرد.

❓ در دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ ، اگر به عنصر واقع در سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، آنگاه a کدام است؟

④ $\frac{3}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

② $-\frac{3}{2}$

① $-\frac{2}{3}$

نکته

فاکتورگیری:

از درایه‌های یک سطر یا یک ستون می‌توان فاکتور گرفت:

$$\begin{vmatrix} a & b & rc \\ d & e & rf \\ g & h & ri \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

بنابراین:

اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون را در عدد r ضرب کنیم، مقدار دترمینان r برابر می‌شود.

❓ اگر $m = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix}$ کدام است؟ $(a, b, c \neq 0)$

④ a

③ $mabc$

② $\frac{m}{abc}$

① $m + a + b + c$

❓ اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $|A|A$ کدام است؟ (کنکور ۹۸)

④ ۲۵۶

③ ۱۲۸

② ۹۶

① ۶۴

❓ اگر $|A| = 4$ و A یک ماتریس 2×2 باشد، آنگاه $\left| \frac{|A|}{2}A + \frac{2}{|A|}A \right|$ کدام است؟

④ ۱۵

③ ۱۶

② ۱۷

① ۱۸

نکته

برابری دو سطر یا ستون:

اگر دو سطر (یا دو ستون) ماتریس با هم برابر باشند، آنگاه دترمینان برابر صفر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$



توجه کنید:

از خاصیت ضربی دترمینان:

$$|AB| = |A| \times |B|$$

نتیجه‌ای مهم حاصل می‌شود که بدون ذکر دلیل، آن را بیان می‌کنیم. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی و $m > n$ باشد. اگر $A_{m \times n}$ و $B_{n \times m}$ دو ماتریس (غیر مربعی) دلخواه باشند، آنگاه:

❖ AB ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی m بوده و دترمینان آن همواره صفر است.

❖ BA نیز ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی n است، ولی در مورد دترمینان آن چیز خاصی نمی‌توان گفت.

در واقع:

در بین ماتریس‌های AB و BA هر کدام که مرتبه‌ی بزرگ‌تری دارد، دترمینانش برابر صفر است.

❖ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. حاصل $|AB| + |BA|$ کدام است؟

۳ ④

۲ ③

۰ ②

۱ ①

نکته‌ی پایانی:

برای سه عدد دلخواه a, b, c ، دترمینان زیر را دترمینان «واندیموند» گویند و مقدار آن نیز به صورت گفته شده قابل محاسبه است:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

❖ معادله‌ی $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & x^2 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ که در آن $(a > b > 0)$ چند ریشه دارد؟

② سه ریشه‌ی متمایز

① هیچ

④ یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده

③ یک